
Identitat pitagòrica

Autor:

Data de publicació: 01-08-2026

La identitat trigonomètrica pitagòrica, també anomenada simplement identitat pitagòrica, és una identitat que expressa el teorema de Pitàgores en termes de funcions trigonomètriques. Juntament amb les fórmules de suma d'angles, és una de les relacions bàsiques entre les funcions sinus i cosinus

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$$

on $\sin^2\theta$ significa $(\sin\theta)^2$ i $\cos^2\theta$ significa $(\cos\theta)^2$.

Contingut

Demostracions i les seves relacions amb el teorema de Pitàgores

Triangles rectangles semblants que mostren el sinus i el cosinus de l'angle θ

Demostració basada en triangles rectangles

Qualsevol parella de triangles semblants té la propietat que si seleccionem el mateix angle en tots ells, la raó dels dos costats que defineixen l'angle és la mateixa independentment de quin triangle semblant es seleccioni, independentment de la seva mida real: les raons depenen dels tres angles, no de les longituds dels costats. Així, per a qualsevol dels triangles rectangles semblants de la figura, la relació entre el seu costat horitzontal i la seva hipotenusa és la mateixa, és a dir, $\cos \theta$.

Les definicions elementals de les funcions sinus i cosinus en termes dels costats d'un triangle rectangle són:

$$\sin\theta = \frac{\text{oposat}}{\text{hipotenusa}} \quad \cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

La identitat pitagòrica es dedueix elevat al quadrat les dues definicions anteriors i sumant-les; el costat esquerre de la identitat esdevé aleshores

$$\frac{\text{oposat}^2}{\text{hipotenusa}^2} + \frac{\text{adjacent}^2}{\text{hipotenusa}^2}$$

que, pel teorema de Pitàgores, és igual a 1. Aquesta definició és vàlida per a tots els angles, a causa de la definició de $x = \cos \theta$ i $y = \sin \theta$ per al cercle unitari i, per tant, $x = \frac{c}{c} \cos \theta$ i $y = \frac{c}{c} \sin \theta$ per a un cercle de radi c i reflectint el nostre triangle en l'eix y i establint $a = x$ i $b = y$.

Alternativament, es poden emprar les identitats que es troben a la simetria trigonomètrica, els desplaçaments i la periodicitat. Per les identitats de periodicitat podem dir que si la fórmula és certa per $0 \leq \theta < 2\pi$ aleshores és certa per a tots θ reals. A continuació, demostrem la identitat en el rang

$0 < t < 2\pi$. Per fer això deixem $t = 2\pi - \theta$, t

que ara estarà dins del rang $0 < \theta < 2\pi$. Aleshores podem fer ús de versions al quadrat d'algunes identitats de desplaçament bàsiques (l'elevació al quadrat elimina convenientment els signes menys):

$$\sin^2(t+2\pi) + \cos^2(t+2\pi) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Finalment, queda demostrar la fórmula per a $\theta < 0$; això es pot fer elevat al quadrat les identitats de simetria per obtenir

$$\sin^2 \theta = \sin^2(-\theta) \text{ and } \cos^2 \theta = \cos^2(-\theta).$$

Identitats relacionades

Triangles rectangles semblants que il·lustren les funcions trigonomètriques tangent i secant
Funcions trigonomètriques i els seus recíprocs en la circumferència unitària. El teorema de Pitàgores aplicat al triangle blau mostra la identitat $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$, i aplicat al triangle vermell mostra que $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.

Les dues identitats $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ i $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ també s'anomenen identitats trigonomètriques pitagòriques. [1] Si un catet d'un triangle rectangle té longitud 1, aleshores la tangent de l'angle adjacent a aquest catet és la longitud de l'altre catet, i la secant de l'angle és la longitud de la hipotenusa.

$$\tan \theta = \frac{b}{a}, \sec \theta = \frac{c}{a}.$$

D'aquesta manera, aquesta identitat trigonomètrica que implica la tangent i la secant es desprèn del teorema de Pitàgores. L'angle oposat al catet de la longitud 1 (aquest angle es pot etiquetar com $\theta = 2\pi - \theta$ té cotangent igual a la longitud de l'altre catet i cosecant igual a la longitud de la hipotenusa. D'aquesta manera, aquesta identitat trigonomètrica que implica la cotangent i la cosecant també es desprèn de la teoria de Pitàgores

La taula següent mostra les identitats amb el factor o divisor que les relaciona amb la identitat principal.

$$\text{Identitats derivades dividint } \sin^2 + \cos^2 = 1$$

Divisor	Equació del divisor	Identitat derivada	Identitat derivada (alternativa)
---------	---------------------	--------------------	----------------------------------

$\cos^2$	$\sin^2 \cos^2 + \cos^2 \cos^2 = 1 \cos^2$	$\tan^2 + 1 = \sec^2$	$\sec^2 \tan^2 = 1(\sec^2 \tan^2)(\sec^2 + \tan^2) = 1$
----------	--	-----------------------	---

$\sin^2$	$\sin^2 \sin^2 + \cos^2 \sin^2 = 1 \sin^2$	$1 + \cot^2 = \csc^2$	$\csc^2 \cot^2 = 1(\csc^2 \cot^2)(\csc^2 + \cot^2) = 1$
----------	--	-----------------------	---

Demostració utilitzant la circumferència radi 1

Punt P(x,y) del cercle de radi unitari a un angle obtús $\theta > \pi/2$
Funció sinusal en el cercle unitari (a dalt) i el seu gràfic (a baix)

El cercle unitari centrat a l'origen del pla euclidià es defineix per l'equació: [2]

$$x^2+y^2=1.$$

Donat un angle θ , hi ha un únic punt P sobre el cercle unitari a un angle θ en sentit antihorari respecte a l'eix x, i les coordenades x i y de P són: [3]

$$x=\cos\theta \text{ and } y=\sin\theta.$$

En conseqüència, a partir de l'equació del cercle unitari, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, la identitat pitagòrica.

A la figura, el punt P té una coordenada x negativa i ve donat adequadament per $x = \cos \theta$, que és un nombre negatiu : $\cos \theta = -\cos(\pi - \theta)$. El punt P té una coordenada y positiva i $\sin \theta = \sin(\pi - \theta) > 0$. A mesura que θ augmenta de zero fins al cercle complet $\theta = 2\pi$, el sinus i el cosinus canvien de signe en els diversos quadrants per mantenir x i y amb els signes correctes. La figura mostra com varia el signe de la funció sinusal a mesura que l'angle canvia de quadrant.

Com que els eixos x i y són perpendiculars, aquesta identitat pitagòrica és equivalent al teorema de Pitàgores per a triangles amb hipotenusa de longitud 1 (que al seu torn és equivalent al teorema complet de Pitàgores aplicant un argument de triangles semblants). Vegeu Cercle unitari per a una breu explicació.

Demostració utilitzant sèries de potències

Les funcions trigonomètriques també es poden definir mitjançant sèries de potències, és a dir, per a x (un angle mesurat en radians): [4] [5]

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{(2n)!} x^{2n+1}, \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(2n)!} x^{2n}.$$

Utilitzant la fórmula de multiplicació per a sèries de potències a Multiplicació i divisió de sèries de potències (modificada adequadament per tenir en compte la forma de la sèrie aquí) obtenim

$$\sin^2 x = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i+1)!}{(2i)!} \frac{(-1)^j (2j+1)!}{(2j)!} x^{(2i+1)+(2j+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i+1)!}{(2i)!} \frac{(-1)^{n-i} (2(n-i)+1)!}{(2(n-i))!} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i+1)!}{(2i)!} \frac{(-1)^{n-i} (2n-2i+1)!}{(2n-2i)!} x^{2n},$$
$$\cos^2 x = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i)!}{(2i)!} \frac{(-1)^j (2j)!}{(2j)!} x^{(2i)+(2j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i)!}{(2i)!} \frac{(-1)^{n-i} (2(n-i))!}{(2(n-i))!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i)!}{(2i)!} \frac{(-1)^{n-i} (2n-2i)!}{(2n-2i)!} x^{2n}.$$

En l'expressió per $\sin^2$, n ha de ser com a mínim 1, mentre que en l'expressió per $\cos^2$, el terme constant és igual a 1. Els termes restants de la seva suma són (sense els factors comuns)

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i+1)!}{(2i)!} \frac{(-1)^{n-i} (2n-2i+1)!}{(2n-2i)!} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j (2j)!}{(2j)!} = (-1)^{2n} = 1$$

pel teorema del binomi . En conseqüència, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, que és la identitat trigonomètrica pitagòrica.

Quan les funcions trigonomètriques es defineixen d'aquesta manera, la identitat en combinació amb el teorema de Pitàgores mostra que aquestes sèries de potències parametrizen el cercle unitari, que hem utilitzat a la secció anterior. Aquesta definició construeix les funcions sinus i cosinus de manera rigorosa i demostra que són diferenciables, de manera que de fet subsumeix les dues anteriors.

Demostració utilitzant l'equació diferencial

El sinus i el cosinus es poden definir com les dues solucions de l'equació diferencial : [6]

$$y'' + y = 0$$

satisfent respectivament $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ i $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. De la teoria de les equacions diferencials ordinàries es desprèn que la primera solució, el sinus, té la segona, el cosinus, com a derivada, i d'això es desprèn que la derivada del cosinus és el negatiu del sinus. La identitat és equivalent a l'afirmació que la funció

$$z = \sin^2 x + \cos^2 x$$

és constant i igual a 1. La diferenciació utilitzant la regla de la cadena dona:

$\frac{d}{dx} z = 2 \sin x \cos x + 2 \cos x (-\sin x) = 0$, per tant, z és constant. Un càlcul confirma que $z(0) = 1$, i z és una constant, de manera que $z = 1$ per a tot x , de manera que s'estableix la identitat pitagòrica.

Es pot completar una demostració similar utilitzant sèries de potències com l'anterior per establir que el sinus té com a derivada el cosinus, i el cosinus té com a derivada el sinus negatiu. De fet, les definicions per equació diferencial ordinària i per sèries de potències condueixen a derivacions similars de la majoria d'identitats.

Aquesta demostració de la identitat no té cap connexió directa amb la demostració d'Euclides del teorema de Pitàgores.

Demostració utilitzant la fórmula d'Euler

Factorització $\cos^2 x + \sin^2 x$ com la diferència complexa de dos quadrats i utilitzant la fórmula d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - i^2 \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = e^{ix} e^{-ix} = e^{ix - ix} = e^0 = 1$$

Referències

- Leff, Lawrence S. Precalculus the Easy Way. 7th. Barron's Educational Series, 2005, p. 296. ISBN 0-7641-2892-2. This result can be found using the distance formula $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ for the distance from the origin to the point (x, y) . See
- Young, Cynthia Y. Algebra and Trigonometry. 2nd. Wiley, 2009, p. 210. ISBN 978-0-470-22273-7. This approach assumes Pythagoras' theorem. Alternatively, one could simply substitute values and determine that the graph is a circle.
- Hungerford, Thomas W. «§6.2 The sine, cosine and tangent functions». A: Contemporary Precalculus: A Graphing Approach. 5th. Cengage Learning, 2008, p. 442. ISBN 978-0-495-10833-7.
- Hamilton, James Douglas. «Power series». A: Time series analysis. Princeton University Press, 1994, p. 714. ISBN 0-691-04289-6.
- Krantz, Steven George. «Definition 10.3». A: Real analysis and foundations. 2nd. CRC Press, 2005, p. 269–270. ISBN 1-58488-483-5.
- Tyn Myint-U. «Example 8.12.1». A: Linear partial differential equations for scientists and engineers. 4th. Springer, 2007, p. 316. ISBN 978-0-8176-4393-5.