
Prova del teorema de Pitàgores

Autor:

Data de publicació: 04-02-2022

DEMOSTRACIÓ DEL TEOREMA DE PITÀGORES

Curs recomanat

Fora de la geometria de la caixa

Trencaclosques de geometria divertits i desafiants que sacsejaren el que penseu.

Armain Labeeb, Gaurav Kumar, Mohammad Farhat i
3 altres

contribuït

Donada la seva llarga història, hi ha nombroses demostracions (més de 350) del teorema de Pitàgores, potser més que qualsevol altre teorema de matemàtiques.

Les proves següents no són exhaustives, i s'han agrupat principalment pels enfocaments utilitzats en les proves.

Contingut

Prova per reordenació
Demostracions geomètriques
Demostracions algebraiques

Prova per reordenació

Qualsevol triangle rectangle amb potes un i b i la hipotenusa c com l'anterior, utilitzeu-ne quatre per fer un quadrat amb costats $a+b$ com es mostra a continuació:

Forma un quadrat al centre amb longitud lateral c i, per tant, una àrea de c^2 .

No obstant això, si reordenem els quatre triangles de la següent manera, podem veure dos quadrats dins del quadrat més gran, un que és a^2 en el terreny i un que és b^2 a la zona:

Atès que la plaça més gran té la mateixa àrea en ambdós casos, és a dir, $(a+b)^2$, i atès que els quatre triangles també són els mateixos en ambdós casos, hem de concloure que els dos quadrats a^2 i b^2 de fet, són iguals en superfície a la plaça més gran c^2 .

Així $a^2 + b^2 = c^2$. _quadrat??

Demostracions geomètriques

La demostració feta per Euclides

En resum, així és com procedeix la demostració en els Elements d'Euclides. El gran quadrat es divideix en un rectangle a l'esquerra i un rectangle dreta. Es construeix un triangle que té la meitat de l'àrea del rectangle esquerre. A continuació, es construeix un altre triangle que té la meitat de l'àrea del quadrat a la part esquerra. Aquests dos triangles es mostren congruents, demostrant que aquest quadrat té la mateixa àrea que el rectangle esquerre. Aquest argument va seguit d'una versió similar per al rectangle dret i el quadrat restant. Ajuntant els dos rectangles per reformar el quadrat sobre la hipotenusa, la seva àrea és la mateixa que la suma de les àrees dels altres dos quadrats. Els detalls segueixen.

Deixar A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, AA, AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL, AM, AN, AO, AP, AQ, AR, AS, AT, AU, AV, AW, AX, AY, AZ, BA, BB, BC, BD, BE, BF, BG, BH, BI, BJ, BK, BL, BM, BN, BO, BP, BQ, BR, BS, BT, BU, BV, BW, BX, BY, BZ, CA, CB, CC, CD, CE, CF, CG, CH, CI, CJ, CK, CL, CM, CN, CO, CP, CQ, CR, CS, CT, CU, CV, CW, CX, CY, CZ, DA, DB, DC, DD, DE, DF, DG, DH, DI, DJ, DK, DL, DM, DN, DO, DP, DQ, DR, DS, DT, DU, DV, DW, DX, DY, DZ, EA, EB, EC, ED, EE, EF, EG, EH, EI, EJ, EK, EL, EM, EN, EO, EP, EQ, ER, ES, ET, EU, EV, EW, EX, EY, EZ, FA, FB, FC, FD, FE, FF, FG, FH, FI, FJ, FK, FL, FM, FN, FO, FP, FQ, FR, FS, FT, FU, FV, FW, FX, FY, FZ, GA, GB, GC, GD, GE, GF, GG, GH, GI, GJ, GK, GL, GM, GN, GO, GP, GQ, GR, GS, GT, GU, GV, GW, GX, GY, GZ, HA, HB, HC, HD, HE, HF, HG, HH, HI, HJ, HK, HL, HM, HN, HO, HP, HQ, HR, HS, HT, HU, HV, HW, HX, HY, HZ, IA, IB, IC, ID, IE, IF, IG, IH, II, IJ, IK, IL, IM, IN, IO, IP, IQ, IR, IS, IT, IU, IV, IW, IX, IY, IZ, JA, JB, JC, JD, JE, JF, JG, JH, JI, JJ, JK, JL, JM, JN, JO, JP, JQ, JR, JS, JT, JU, JV, JW, JX, JY, JZ, KA, KB, KC, KD, KE, KF, KG, KH, KI, KJ, KK, KL, KM, KN, KO, KP, KQ, KR, KS, KT, KU, KV, KW, KX, KY, KZ, LA, LB, LC, LD, LE, LF, LG, LH, LI, LJ, LK, LL, LM, LN, LO, LP, LQ, LR, LS, LT, LU, LV, LW, LX, LY, LZ, MA, MB, MC, MD, ME, MF, MG, MH, MI, MJ, MK, ML, MM, MN, MO, MP, MQ, MR, MS, MT, MU, MV, MW, MX, MY, MZ, NA, NB, NC, ND, NE, NF, NG, NH, NI, NJ, NK, NL, NM, NN, NO, NP, NQ, NR, NS, NT, NU, NV, NW, NX, NY, NZ, OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, OI, OJ, OK, OL, OM, ON, OO, OP, OQ, OR, OS, OT, OU, OV, OW, OX, OY, OZ, PA, PB, PC, PD, PE, PF, PG, PH, PI, PJ, PK, PL, PM, PN, PO, PP, PQ, PR, PS, PT, PU, PV, PW, PX, PY, PZ, QA, QB, QC, QD, QE, QF, QG, QH, QI, QJ, QK, QL, QM, QN, QO, QP, QQ, QR, QS, QT, QU, QV, QW, QX, QY, QZ, RA, RB, RC, RD, RE, RF, RG, RH, RI, RJ, RK, RL, RM, RN, RO, RP, RQ, RR, RS, RT, RU, RV, RW, RX, RY, RZ, SA, SB, SC, SD, SE, SF, SG, SH, SI, SJ, SK, SL, SM, SN, SO, SP, SQ, SR, SS, ST, SU, SV, SW, SX, SY, SZ, TA, TB, TC, TD, TE, TF, TG, TH, TI, TJ, TK, TL, TM, TN, TO, TP, TQ, TR, TS, TT, TU, TV, TW, TX, TY, TZ, UA, UB, UC, UD, UE, UF, UG, UH, UI, UJ, UK, UL, UM, UN, UO, UP, UQ, UR, US, UT, UY, UZ, VA, VB, VC, VD, VE, VF, VG, VH, VI, VJ, VK, VL, VM, VN, VO, VP, VQ, VR, VS, VT, VU, VV, VW, VX, VY, VZ, WA, WB, WC, WD, WE, WF, WG, WH, WI, WJ, WK, WL, WM, WN, WO, WP, WQ, WR, WS, WT, WU, WV, WW, WX, WY, WZ, XA, XB, XC, XD, XE, XF, XG, XH, XI, XJ, XK, XL, XM, XN, XO, XP, XQ, XR, XS, XT, XU, XV, XW, XX, XY, XZ, YA, YB, YC, YD, YE, YF, YG, YH, YI, YJ, YK, YL, YM, YN, YO, YP, YQ, YR, YS, YT, YU, YV, YW, YX, YY, YZ, ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, ZG, ZH, ZI, ZJ, ZK, ZL, ZM, ZN, ZO, ZP, ZQ, ZR, ZS, ZT, ZU, ZV, ZW, ZX, ZY, ZZ.

Per a la prova formal, necessitem quatre lemmata elementals:

Si dos triangles tenen dos costats de l'un igual a dos costats de l'altre, cadascun a cada un, i els angles inclosos per aquests costats iguals, llavors els triangles són congruents (costat-angle-costat).
L'àrea d'un triangle és la meitat de l'àrea de qualsevol paral·lelogram sobre la mateixa base i que té la mateixa altitud.
L'àrea d'un rectangle és igual al producte de dos costats adjacents.
L'àrea d'un quadrat és igual al producte de dos dels seus costats (segueix de 3).

A continuació, cada quadrat superior està relacionat amb un triangle congruent amb un altre triangle relacionat al seu torn amb un dels dos rectangles que componen el quadrat inferior.

Deixar ACBACB és un triangle d'angle recte amb angle recte CABINACAB.

En cadascun dels costats ACBC, ABAB i CAAA, es dibuixen quadrats: CBDECBDE, BAGFBAGF i ACIHACIH, en aquest ordre. La construcció de quadrats requereix els teoremes immediatament anteriors en Euclides i depèn del postulat paral·lel.

De UNUN, dibuixa una línia paral·lela a BDBD i CECE. Es creuarà perpendicularment ACBC i DEDE a KK i LL respectivament.

Unir CFCF i ANUNCIANUNCI, per formar els triangles BCFBCF i BDABDA.

Angles CABINACAB i BOSSABAG són els dos angles rectes; per això CC, UNUN i GG són col·lineals. De la mateixa manera per BB, UNUN i HH.

Angles CBDCBD i FBAFBA són els dos angles rectes; per tant, angle ABDABD és igual a angle FBCFBC, ja que ambdós són la suma d'un angle recte i un angle ABCABC.

Des que ABAB és igual a FBFB i BDBD és igual a ACBC triangle ABDABD ha de ser congruent amb el triangle FBCFBC.

Des que UNUN-KK-LL és una línia recta paral·lela a BDBD rectangle BDLKBDLK té el doble d'àrea de triangle. ABDABD perquè comparteixen la base BDBD tenen la mateixa altitud BKBK, és a dir, una línia normal a la seva base comuna, connectant les línies paral·leles BDBD i ALAL. (Lemma 2 més amunt)

Des que CC col·lina amb UNUN i GG quadrat BAGFBAGF ha d'estar dues vegades en àrea a triangle FBCFBC.

Per tant, rectangle BDLKBDLK ha de tenir la mateixa àrea que la plaça BAGF, BAGF, el que és $AB^2 \cdot UNB^2$.

De la mateixa manera, es pot demostrar que el rectangle CKLECKLE ha de tenir la mateixa àrea que la plaça ACIH, ACIH, el que és $AC^2 \cdot UNC^2$.

Si s'afegeixen aquests dos resultats, $AB^2 + AC^2 = BD \text{ times } BK + KL \text{ times } KC \cdot UNB^2 + UNC^2 = BD \times BK + KL \times KC$.

Des que $BD = KL$ $BD \times BK + KL \times KC = BD(BK + KC) = BD \times BC$. $BD \times BK + KL \times KC = BD(BK + KC) = BD \times BC$.

Per això $AB^2 + AC^2 = BC^2 \cdot UNB^2 + UNC^2 = BC^2$ des que CBDECBDE és una plaça. _quadrat??

Ús de triangles similars

Deixar ABCABC representen un triangle rectangle, amb l'angle recte situat a CC, com es mostra a la figura. Dibuixa l'altitud des del punt CC, i truca DD la seva intersecció amb el costat ABAB. Punt DD divideix la longitud de la hipotenusa cc en parts dd i ee. El nou triangle ACDACD és similar al triangle ABCABC, perquè tots dos tenen un angle recte (per definició de l'altitud), i comparteixen l'angle a UNUN, és a dir, que el tercer angle ((que anomenarem theta)?) El mateix passarà en ambdós triangles. Per un raonament similar, el triangle CBDCBD també s'assembla al triangle. ABCABC. La demostració de similitud dels triangles requereix el postulat del triangle: la suma dels angles d'un triangle és de dos angles rectes, i és equivalent al postulat paral·lel. La similitud dels triangles condueix a la igualtat de

relacions dels costats corresponents:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC} \text{ i } \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}. \text{ AB} \cdot \text{BC} = \text{BC} \cdot \text{BD} \text{ i } \text{AB} \cdot \text{AC} = \text{AC} \cdot \text{AD}.$$

Les fraccions de la primera igualtat són els cosinus de l'angle. θ , mentre que els de la segona igualtat són els seus pecats. Aquestes relacions es poden escriure com

$$BC^2 = AB \cdot BD \text{ i } AC^2 = AB \cdot AD. \text{ BC}^2 = \text{AB} \times \text{BD} \text{ i } \text{AC}^2 = \text{AB} \times \text{AD}.$$

Sumant aquestes dues igualtats es tradueix en

$$AC^2 + BC^2 = AB(BD + AD) = AB^2. \text{ AC}^2 + \text{BC}^2 = \text{AB}(\text{BD} + \text{AD}) = \text{AB}^2.$$

Per això

$$AC^2 + BC^2 = AB^2. \text{ } \square \text{ AC}^2 + \text{BC}^2 = \text{AB}^2. \text{ } \square$$

Demostracions algebraiques

Dues demostracions algebraiques que utilitzen quatre conjunts de triangles

El teorema es pot demostrar algebraicament utilitzant quatre còpies d'un triangle rectangle amb costats. a, b, c , disposada a l'interior d'una plaça amb costat c , Com a la meitat superior del diagrama. Els triangles són similars a l'àrea. $\frac{1}{2}ab$, mentre que el quadrat petit té un costat $b - a$ i àrea $(b - a)^2$. La superfície de la gran plaça és, per tant,

$$(b-a)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}ab \right) = (b-a)^2 + 2ab = a^2 + b^2. (b-a)^2 + 4 \left(\frac{1}{2}ab \right) = (b-a)^2 + 2ab = a^2 + b^2.$$

Es tracta d'una plaça amb costat c i àrea c^2

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Una demostració similar utilitza quatre còpies del mateix triangle disposades simètricament al voltant d'un quadrat amb el costat c , com es mostra a la part inferior del diagrama. Això dona com a resultat un quadrat més gran amb costat $a + b$ i àrea $(a + b)^2$. Els quatre triangles i el quadrat amb el costat c ha de tenir la mateixa àrea que la plaça més gran:

$$(b+a)^2 = c^2 + 4 \left(\frac{1}{2}ab \right) = c^2 + 2ab, (b+a)^2 = c^2 + 2ab,$$

donant

$$c^2 = (b+a)^2 - 2ab = a^2 + b^2. c^2 = (b+a)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

Una prova relacionada va ser publicada pel futur president dels Estats Units James A. Garfield. En lloc d'un quadrat, utilitza un trapezi, que es pot construir des del quadrat en la segona de les proves anteriors biseccionant al llarg d'una diagonal del quadrat interior, per donar el trapezi com es mostra en el diagrama. L'àrea del trapezi es pot calcular com la meitat de l'àrea de la plaça, és a dir,

$$\frac{1}{2} (b+a)^2 \cdot 21? (b+un)^2.$$

El quadrat interior es redueix a la meitat i només hi ha dos triangles, de manera que la prova procedeix com a dalt excepte per a un factor de $\frac{1}{2}$, que s'elimina multiplicant per dos per donar el resultat. _quadrat??

Cita com: Teorema de Pitàgores. Brilliant.org. Recuperat 10:06, 4 de febrer de 2022, de <https://brilliant.org/wiki/proofs-of-the-pythagorean-theorem/>